

А. А. Жешко

*РУП «НПЦ НАН Беларуси по механизации сельского хозяйства»
г. Минск, Республика Беларусь
E-mail: azeshko@gmail.com*

КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ ПОТЕРЬ ОТ НЕРАВНОМЕРНОГО ВНЕСЕНИЯ УДОБРЕНИЙ

Аннотация. В статье представлены аналитические зависимости изменения потенциальной урожайности сельскохозяйственных культур, связанные с неравномерностью распределения твердых минеральных удобрений по поверхности поля. Представлены графические зависимости, отражающие изменение коэффициента относительных потерь удобрений при различных значениях коэффициента вариации.

Ключевые слова: твердые минеральные удобрения, неравномерность распределения, коэффициент вариации, коэффициент относительных потерь.

A. A. Zheshko

*RUE "SPC NAS of Belarus for Agriculture Mechanization"
Minsk, Republic of Belarus
E-mail: azeshko@gmail.com*

CRITERIA FOR ASSESSING LOSSES FROM UNEVEN FERTILIZATION

Abstract. The article presents analytical dependences of changes in the potential yield of agricultural crops depending on the uneven distribution of solid mineral fertilizers over the field surface. Graphical dependences reflecting the change in the coefficient of relative losses of fertilizers at different values of the coefficient of variation are presented.

Keywords: solid mineral fertilizers, uneven distribution, coefficient of variation, coefficient of relative losses.

Введение

Нахождение и формализация функции отклика урожайности сельскохозяйственных культур от дозы вносимых удобрений является одной из наиболее популярных задач агрохимической науки на протяжении более 100 последних лет. В настоящее время существует множество одномерных моделей, которые позволяют анализировать продуктивность сельскохозяйственных культур в зависимости от одного значимого фактора, например, дозы вносимых азотных удобрений, при постоянстве других факторов. Увеличение количества факторов агрономического опыта позволяет избежать возможных ошибок в расчетах, что особенно актуально в зоне «рискованного земледелия», характерной для Беларуси [1, с. 321–334; 2, с. 304–318].

Широкую известность получили классические модели описания продуктивности сельскохозяйственных культур, которые разрабатывали Юстус фон Либих (1855), Э. Митчерлих (1909), Пфайфер и Фролих (1912), Б. Бауле (1918), Шпильманн (1923), В. Богуславский (1962) и другие ученые [3, с. 128–132; 4].

В исследовании, проведенном Р. Гриффином [5, с. 216–227], выделено двадцать различных типов функций, которые использованы для аппроксимации продуктивности сельскохозяйственных культур. Среди них функция Э. Митчерлиха, квадратичная функция, производственная функция В. Леонтьева, кубическая, линейная и другие функции. Для нахождения критерия оценки потерь от неравномерного внесения удобрений необходимо подробно рассмотреть существующие функции продуктивности и выявить взаимосвязь между качеством распределения удобрений и урожайностью сельскохозяйственных культур.

Основная часть

Наиболее цитируемыми в литературных источниках являются:

– функция Э. Митчерлиха (Mitcherlich, 1909) [6, с. 269–295; 7, с. 2–3]

$$Y_{Mt} = A_u (1 - e^{-cX}), \quad (1)$$

где A_u – максимальная для данных условий урожайность культуры, т/га; c – эмпирический коэффициент;

– квадратичная модель отклика (Pfeifer & Frolich, 1912) [8, с. 107–116; 2, 304; 9, с. 122–132; 10, с. 681–689]:

$$Y_{Pf} = c_0 + c_1X - c_2X^2. \quad (2)$$

Также следует выделить полином третьей степени [11, с. 247]:

$$Y_{St} = c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3. \quad (3)$$

Уравнения, представленные формулами (1), (2) и (3), позволяют определять влияние дозы удобрений на урожайность сельскохозяйственных культур. По форме кривой существующие модели представляют собой возрастающие выпуклые линии с замедляющимся ростом или выходом на плато [4] (рисунок 1).

По причине неравномерного внесения удобрений доза их будет неодинаковой в различных участках поля. Таким образом существует различие между заданной и фактической дозами внесения удобрений, которое можно оценить коэффициентом вариации V , что в конечном итоге отразится на величине урожайности (рисунок 2).

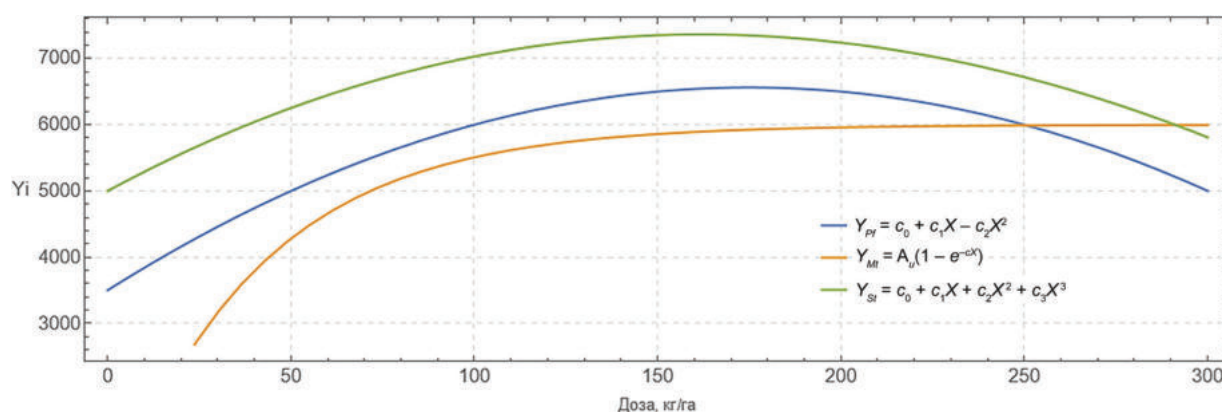


Рисунок 1 – Классические функции урожайности (продуктивности) сельскохозяйственных культур

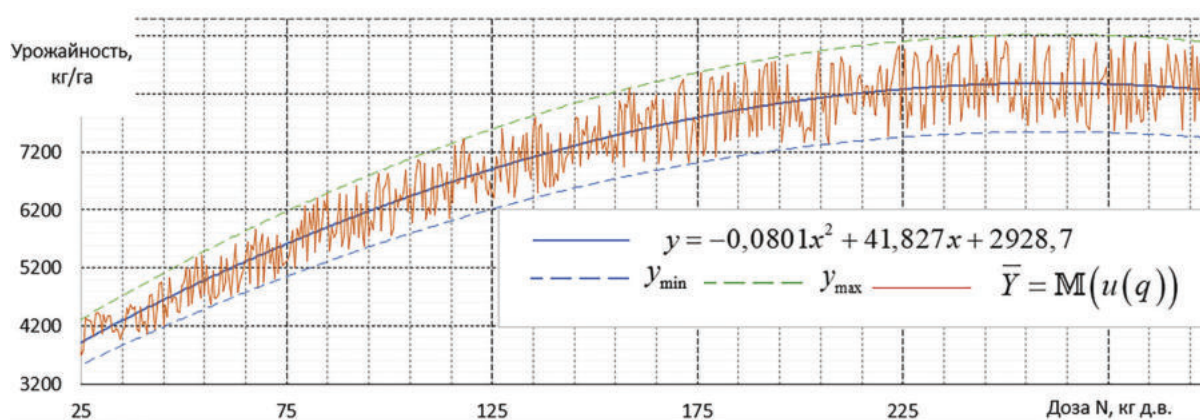


Рисунок 2 – Изменение дозы вносимых удобрений по причине неравномерного их внесения

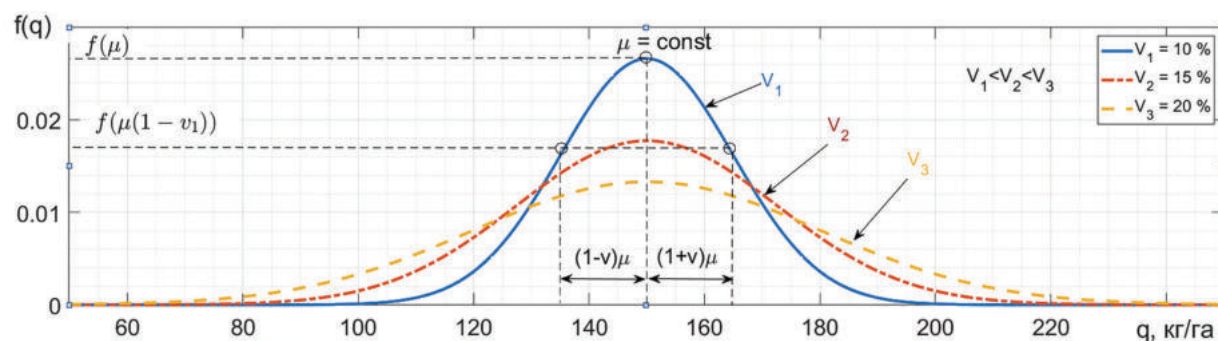


Рисунок 3 – График плотности распределения дозы минеральных удобрений $f(q)$ для различных коэффициентов вариации V при постоянной средней дозе внесения $\mu = \text{const}$

Причиной неравномерного внесения удобрений может служить несовершенство конструкции машин для внесения удобрений, а также уровень дифференциации внесения, рациональность организации технологического процесса и ряд других факторов. В работе исследователей [12, с. 943–952; 13, с. 16–21; 14, с. 85–88] предложены закономерности, подтверждающие непосредственное влияние на величину урожайности коэффициента вариации V .

Для оценки потерь от неравномерного внесения удобрений необходимо установить функциональную взаимосвязь между урожайностью сельскохозяйственных культур и качественными характеристиками распределения удобрений по поверхности поля.

Для характеристики неравномерности распределения удобрений используют коэффициент вариации V , который определяется как отношение стандартного отклонения σ к среднему значению дозы μ [15, с. 31]:

$$V = \sigma / \mu, \quad (4)$$

где σ – среднее квадратическое отклонение дозы удобрений, кг/га; μ – средняя доза удобрений, кг/га.

Согласно мнению исследователей [13; 14; 15; 16, с. 16–25], распределение удобрений по полю подчиняется нормальному закону распределения. Тогда плотность распределения дозы минеральных удобрений по рабочему участку (рисунок 3) можно представить в виде

$$f(q) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{V\mu\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q-\mu)^2}{2V^2\mu^2}}, \quad (5)$$

где q – доза вносимых удобрений в физическом весе, кг/га.

Как видно из рисунка 3, кривая плотности нормального распределения дозы минеральных удобрений $f(q)$ имеет симметричный вид относительно прямой $q = \mu$ с максимумом в точке, соответствующей средней дозе удобрений μ .

Значение максимума функции плотности распределения дозы минеральных удобрений определяется по формуле:

$$f(\mu) = \frac{1}{\mu V_i \sqrt{2\pi}}, \quad (6)$$

где $V_i = \sigma_i / \mu$ – коэффициент вариации при постоянной дозе внесения удобрений $\mu = \text{const}$.

Точки перегиба кривой имеют координаты $\left(\mu(1-V_i); \frac{1}{V_i\mu\sqrt{2\pi}e}\right)$ и $\left(\mu(1+V_i); \frac{1}{V_i\mu\sqrt{2\pi}e}\right)$.

Рассмотрим влияние параметров V и μ на вид графиков функции распределения удобрений. Учитывая, что площадь под кривой плотности распределения равна:

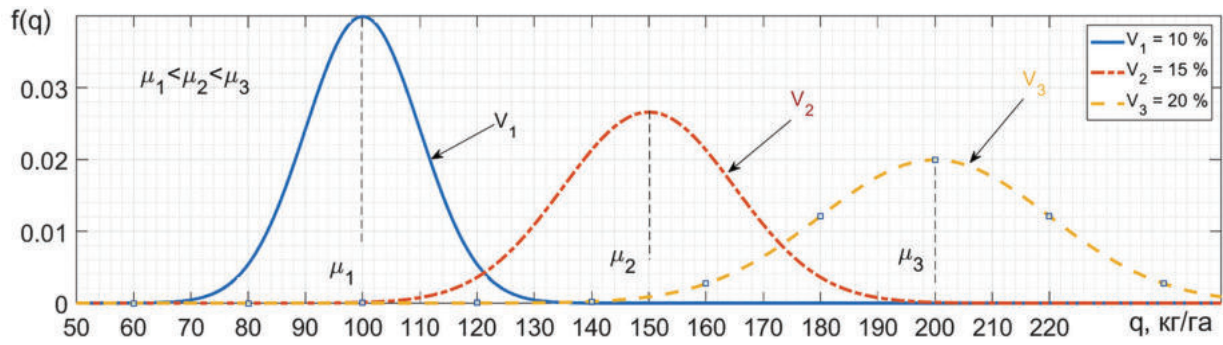


Рисунок 4 – График плотности распределения дозы минеральных удобрений $f(q)$ для различных коэффициентов вариации V при изменении средней дозы внесения μ_i

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(q) dq = \frac{1}{V\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(q-\mu)^2}{2V^2\mu^2}} dq = \left| \begin{array}{l} y = \frac{q-\mu}{V\mu} \\ \frac{dy}{dq} = \frac{1}{V\mu} \\ dq = V\mu dy \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1. \quad (7)$$

Таким образом, при увеличении коэффициента вариации V и постоянной средней дозы удобрений $\mu = \text{const}$ кривая плотности распределения становится более полой и вытянутой вдоль оси абсцисс.

Если изменяется средняя доза вносимых удобрений μ_i , то кривая плотности распределения дозы удобрений смещается вдоль горизонтальной оси (рисунок 4).

Функция отзывчивости удобрений на урожай [17; 18]:

$$y = u(q) = c_0 + c_1 q - c_2 q^2, \quad (8)$$

$$\bar{Y} = M(u(q)) = c_0 + c_1 M(q) - c_2 M(q^2).$$

$$\begin{aligned} M(q) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q e^{-\frac{(q-\mu)^2}{2\sigma^2}} dq = \left| \begin{array}{l} y = \frac{q-\mu}{\sigma}, \quad q = \sigma y + \mu \\ \frac{dy}{dq} = \frac{1}{\sigma} \rightarrow dq = \sigma dy \end{array} \right| = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \times 0 + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = \mu. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} M(q^2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^2 e^{-\frac{(q-\mu)^2}{2\sigma^2}} dq = \left| \begin{array}{l} y = \frac{q-\mu}{\sigma}, \quad q^2 = \sigma^2 y^2 + 2\sigma y \mu + \mu^2 \\ \frac{dy}{dq} = \frac{1}{\sigma} \rightarrow dq = \sigma dy \end{array} \right| = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} + \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \times 0 + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = \sigma^2 + \mu^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что по формуле (3) урожайность может определяться через полином третьей степени, определим значение:

$$M(q^3) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^3 e^{-\frac{(q-\mu)^2}{2\sigma^2}} dq = \mu(\mu^2 + 3\sigma^2). \quad (11)$$

Тогда:

$$\bar{y} = M(u(q)) = c_0 + c_1\mu - c_2(\sigma^2 + \mu^2) = |\sigma = \mathbb{V}\mu| = c_0 + c_1\mu - c_2\mu^2(\mathbb{V}^2 + 1). \quad (12)$$

Для нахождения относительных потерь удобрений запишем:

$$\psi = \frac{y - \bar{y}}{y} = \frac{q(c_1 + c_2q) - \mu(c_1 + c_2\mathbb{V}^2 + c_2)}{c_0 + q(c_1 + c_2q)}. \quad (13)$$

Обозначим снижение дозы удобрений от неравномерного их внесения $\Delta\mu$, тогда средняя доза составит:

$$\bar{y} = c_0 + c_1(\mu - \Delta\mu) - c_2(\mu - \Delta\mu)^2. \quad (14)$$

Приравнивая формулы (12) и (14), и решая относительно $\Delta\mu$, определяем абсолютные потери удобрений от неравномерного внесения:

$$c_0 + c_1(\mu - \Delta\mu) - c_2(\mu - \Delta\mu)^2 = c_0 + c_1\mu - c_2\sigma^2 - c_2\mu^2. \quad (15)$$

Учитывая, что доза минеральных удобрений μ_0 , при которой обеспечивается максимальный урожай, в соответствии составит:

$$\mu_0 = \frac{c_1}{2c_2}. \quad (16)$$

Тогда:

$$\xi = \frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\mu - \mu_0 + \sqrt{\sigma^2 + (\mu - \mu_0)^2}}{\mu} = \frac{\mu - \mu_0 + \sqrt{\mathbb{V}^2\mu^2 + (\mu - \mu_0)^2}}{\mu}. \quad (17)$$

Найдем отношение снижения дозы от неравномерного внесения удобрений $\Delta\mu$ и средней дозы удобрений μ , тем самым получим значение относительных потерь удобрений от неравномерного их распределения:

$$\xi = \frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\mu - \mu_0 + \sqrt{\sigma^2 + (\mu - \mu_0)^2}}{\mu} = \frac{\mu - \mu_0 + \sqrt{\mathbb{V}^2\mu^2 + (\mu - \mu_0)^2}}{\mu}. \quad (18)$$

Рассмотрим, как изменяется коэффициент относительных потерь удобрений ξ при варьировании дозы удобрений и коэффициента вариации (рисунки 5 и 6).

Как видно из рисунка 5, при внесении различных доз минеральных удобрений с неизменным качеством их распределения, например, при $\mathbb{V} = 0,2$ коэффициент потерь удобрений остается неизменным.

Из графика, представленного на рисунке 6, видно, что если средняя доза внесения удобрений постоянна, т. е. $\mu_0 = \text{const}$, то при увеличении коэффициента вариации $\mathbb{V}$ наблюдается возрастание коэффициента относительных потерь удобрений ξ . Таким образом коэффициент относительных потерь минеральных удобрений ξ позволяет объективно оценить потери от неравномерного их внесения.

Для оценки потерь удобрений от неравномерного внесения для различных коэффициентов вариации построим график, отражающий зависимость потенциальных потерь урожая при значении коэффициентов $c_0 = 2928,7$; $c_1 = 41,827$; $c_2 = -0,081$. Как видно из рисунка 7 для средней дозы внесения $\mu_0 = 250$ кг/га при коэффициенте вариации $\mathbb{V} = 0,15$ абсолютные потери урожая достигают 113 кг/га.

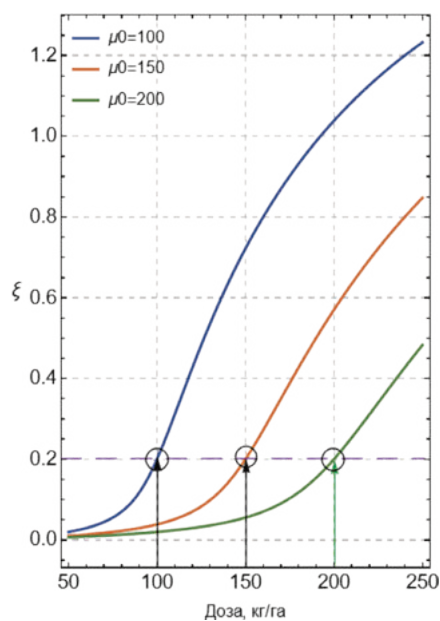


Рисунок 5 – Изменение коэффициента относительных потерь удобрений при различных дозах внесения удобрений ($V = \text{const}$)

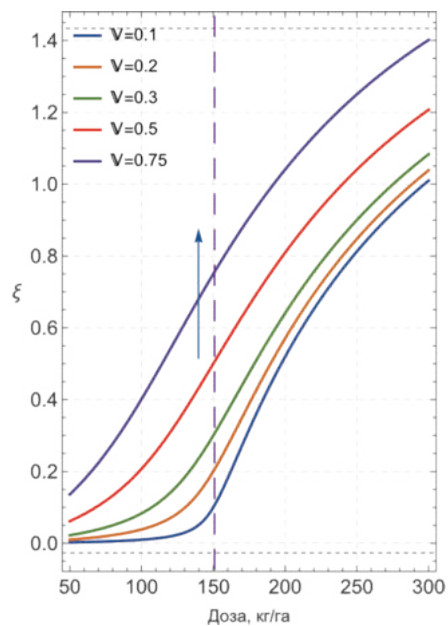


Рисунок 6 – Изменение коэффициента относительных потерь удобрений при различных значениях коэффициента вариации ($\mu_0 = \text{const}$)

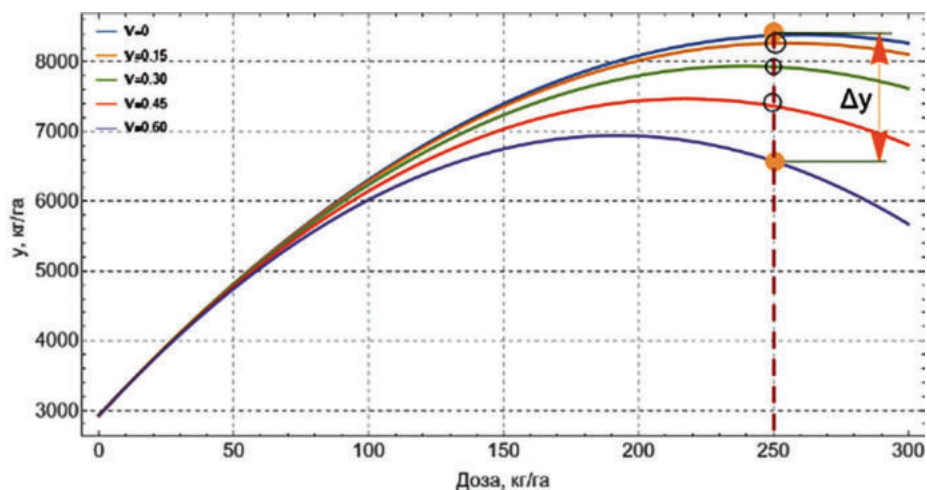


Рисунок 7 – Потери потенциального урожая в зависимости от неравномерности внесения удобрений для средней дозы внесения $\mu_0 = 250$ кг/га

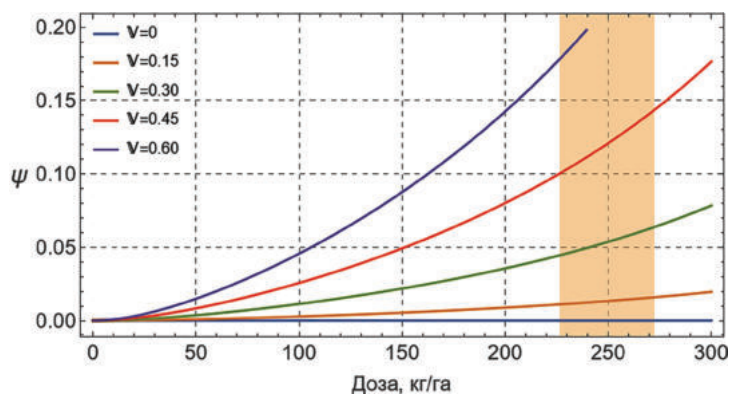


Рисунок 8 – График изменения относительных потенциальных потерь удобрений в зависимости от коэффициента вариации для средней дозы внесения

Из рисунка 8 видно, что с увеличением неравномерности распределения удобрений до $V = 0,15$ теряется 1,34 % урожая. Относительные возможные потери удобрений от нерационального их использования по причине неравномерного внесения отображены на рисунке 8, где представлена зависимость изменения относительных потерь удобрений от коэффициента вариации для средней дозы внесения $\mu_0 = 250$ кг/га.

Заключение

Таким образом, неравномерное внесение является одним из наиболее негативных факторов, который приводит не только к потерям урожая сельскохозяйственных культур, но также является причиной нерационального использования удобрений, которые затем смываются грунтовыми водами, что в конечном итоге приводит к загрязнению почвы и окружающей среды. Для повышения эффективности процесса внесения твердых минеральных удобрений целесообразно осуществлять внутрипочвенное внесение или сплошное распределение штанговыми рабочими органами.

Список использованных источников

1. Лихацевич, А. П. Использование математического моделирования для повышения достоверности оценки результатов полевого агрономического опыта / А. П. Лихацевич // Весці НАН Беларусі. Серыя аграрных навук. – 2018. – Т. 56, № 3. – С. 321–334.
2. Лихацевич, А. П. Математическая модель урожая сельскохозяйственных культур / А. П. Лихацевич // Весці НАН Беларусі. Серыя аграрных навук. – 2021. – Т. 59, № 3. – С. 304–318.
3. Пуховский, А. В. Метод аппроксимации и калибровки модели Митчерлиха–Спилмана–Бауле–Богуславского / А. В. Пуховский, Н. Ф. Хохлов // Матер. Всеросс. конф. «Математические модели и информационные технологии в сельскохозяйственной биологии: итоги и перспективы», Санкт-Петербург, 14–15 окт. 2010 г. – 2010. – С. 128–132.
4. Абнормальные формы функции отклика «Удобрение–продуктивность»: полевые наблюдения и модельный анализ / А. Г. Топаж, П. В. Лекомцев, А. В. Пасынков, А. В. Пуховский // Известия ТСХА. – 2015. – № 2.
5. Griffin, R. C. Selecting a functional form in production function analysis / R. C. Griffin, J. M. Montgomery, M. E. Rister // Western J. Agric. Econ. – 1987. – № 12. – P. 216–227.
6. Dhanoa, M. S. Overview and Application of the Mitscherlich Equation and its Extensions to Estimate the Soil Nitrogen Pool Fraction Associated with Crop Yield and Nitrous Oxide Emission // M. S. Dhanoa, R. Sanderson, L. M. Cardenas [et al.] // Advances in Agronomy. Elsevier. – 2022. – P. 269–295.
7. Пуховский, А. В. К проблеме моделирования действия удобрений на продуктивность полевых культур в многомерном факторном пространстве / А. В. Пуховский // Плодородие. – 2010. – № 4. – С. 2–3.
8. Yield response of potato to spatially patterned nitrogen application / R. M. Shillito, D. J. Timlin, D. Fleisher [et al.] // Agriculture, Ecosystems and Environment. – 2009. – № 129. – P. 107–116.
9. Grinsven, H. Establishing long-term nitrogen response of global cereals to assess sustainable fertilizer rates / Hans J. M. van Grinsven, Peter Ebanyat Margaret Glendinning // Nature Food. 3. – Nature Food. – Vol. 3. – February 2022. – P. 122–132.
10. Ali, M. In-Season Estimation of Wheat Response to Nitrogen Using Normalized Difference Vegetation Index / Ali M. Ali, Sherif M. Ibrahim, Emad M. M. Salem // International Journal of Plant Production. – 2022. – P. 681–689.
11. Stritzel, Joseph A. Agronomic and economic evaluation of direct and residual crop responses to various fertilizer nutrients / Joseph A. Stritzel // Unpublished Ph. D. Thesis. Ames, Iowa. Library, Iowa State University of Science and Technology. – 1958. – 247 p.
12. Kaplan, J. Unevenness of Fertilizer Distribution and determination of the Application Rate / J. Kaplan, J. Chaplin. – Proceedings of the 4-th International Conference on Precision Agriculture. – St. Paul, MN, USA. – 1998. – P. 943–952.
13. Личман, Г. И. Оценка влияния качества внесения удобрений на урожайность сельскохозяйственных культур / Г. И. Личман, А. А. Личман // Сельскохозяйственные машины и технологии. – 2017. – № 5. – С. 16–21.
14. Стратегия механизации внесения удобрений / Л. Я. Степук, И. В. Румянцев, Н. М. Марченко, Г. И. Личман // Механизация, энергетика и автоматизация. – Известия Академии аграрных наук Республики Беларусь. – 1999. – № 1. – С. 85–88.
15. Хайлис, Г. А. Исследования сельскохозяйственной техники и обработка опытных данных / Г. А. Хайлис, Н. Г. Ковалев. – М. : Колос, 1994. – 169 с.
16. Fortune, R. A. Factors affecting fertilizer spread patterns / Dr. R. A. Fortune // The fertilizer association of Ireland. – № 35. – P. 16–25.
17. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 10-е изд. – М. : Высш. шк., 2004. – 479 с.
18. Семенов, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие. Стандарт третьего поколения / В. А. Семенов. – СПб. : Питер, 2013. – 192 с.